

به نام خدا
دانشگاه آزاد اسلامی
واحد اصفهان (خوراسگان)

درس: تحقیق در عملیات (پژوهش عملیاتی)

رشته: حسابداری

تحقیق در عملیات

جلسه هفتم

فصل سوم

دوگان

3

دوگان

در کنار هر مسئله برنامه ریزی خطی که ما آن را مسئله اولیه می نامیم، یک مسئله برنامه ریزی خطی دیگر وجود دارد که مسئله دوگان یا ثانویه نامیده می شود. مسائل اولیه و دوگان رابطه های زیادی با هم داشته و می توان به کمک اطلاعات موجود برای یک مسئله، اطلاعاتی را در مورد مسئله دیگر به دست آورد.

4

تحقیق در عملیات

تعریف مسئله دوگان

مسئله برنامه ریزی خطی زیر را به عنوان مسئله اولیه (P) در نظر بگیرید که به فرم کانونی یک مسئله

مینیمم سازی است:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

دوگان (D) این مسئله به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} \max \quad & Y = \sum_{i=1}^m b_i y_i \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ & y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned}$$

همانگونه که مشاهده می شود، مسئله دوگان نیز فرم کانونی یک مسئله ماکزیمم سازی را دارد.

5

تحقیق در عملیات

با توجه به مسائل اولیه و دوگان فوق، می توان مشاهدات اولیه زیر را در مورد این دو مسئله بیان نمود:

۱. تابع هدف یکی از مسائل به فرم مینیمم سازی و تابع هدف مسئله دیگر به فرم ماکزیمم سازی است.

۲. متغیرهای هر دو مسئله، نامنفی هستند.

۳. بردار ضرایب تابع هدف یک مسئله، بردار سمت راست محدودیت ها در مسئله دیگر را تشکیل می دهد.

6

تحقیق در عملیات

۴. متناظر هر متغیر در یک مسئله، یک محدودیت در مسئله دیگر و همچنین، متناظر هر محدودیت در یک مسئله، یک متغیر در مسئله دیگر وجود دارد و بنابراین، تعداد محدودیت های یک مسئله با تعداد متغیرهای مسئله دیگر برابر است.

۵. ضرایب مربوط به هر متغیر در یک مسئله، ضرایب محدودیت نظیر آن متغیر در مسئله دیگر را تشکیل می دهند.

با توجه به اینکه فرم های مختلف مسائل برنامه ریزی خطی را می توان به یکدیگر تبدیل نمود، بنابراین پس از تبدیل هر مسئله به فرم کانونی مینیمم سازی، می توان دوگان آن را به کمک تعریف فوق نوشت.

7

تحقیق در عملیات

مثال ۳-۱. مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 3x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + 2x_2 \leq 2, \\ & x_1 - x_2 \geq 3, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

8

تحقیق در عملیات

برای نوشتن دوگان این مسئله، ابتدا باید آن را به فرم کانونی نوشت و بدین منظور، جهت محدودیت اول باید عوض شود. بنابراین، با ضرب طرفین محدودیت اول در -1 ، فرم کانونی زیر به دست می آید:

$$\begin{array}{ll} \min & z = 3x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ & x_1 - x_2 \geq 3, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \min & z = 3x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & -x_1 - 2x_2 \geq -4, \\ & x_1 - x_2 \geq 3, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

9

تحقیق در عملیات

با توجه به اینکه مسئله اولیه دارای دو محدودیت است، دو متغیر y_1 و y_2 برای مسئله دوگان، به ترتیب متناظر محدودیت های اول و دوم تعریف می شود.

همچنین، متناظر متغیر x_1 در مسئله اولیه، یک محدودیت در مسئله دوگان نوشته می شود که ضرایب متغیرهای دوگان در آن محدودیت، همان ضرایب x_1 در دو محدودیت مسئله اولیه بوده و سمت راست آن محدودیت نیز ضریب x_1 در تابع هدف مسئله اولیه است. به همین ترتیب، می توان محدودیت مربوط به متغیر x_2 را نیز نوشت.

10

تحقیق در عملیات

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = 3x_1 + x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & -x_1 - 2x_2 \geq -2, \quad \leftarrow y_1 \\
 & x_1 - x_2 \geq 3, \quad \leftarrow y_2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

بنابراین، دوگان مسئله فوق به صورت زیر است:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & Y = -2y_1 + 3y_2 \\
 \text{s.t.} \quad & -y_1 + y_2 \leq 3, \quad (\text{متناظر متغیر } x_1) \\
 & -2y_1 - y_2 \leq 1, \quad (\text{متناظر متغیر } x_2) \\
 & y_1, y_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

11

تحقیق در عملیات

دوگان فرم استاندارد

اگر مسئله اولیه، به فرم استاندارد زیر و با محدودیت های تساوی باشد:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m, \\
 & x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.
 \end{aligned}$$

دوگان این مسئله به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & Y = \sum_{i=1}^m b_i y_i \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\
 & y_i \text{ نامقید}, \quad i = 1, 2, \dots, m.
 \end{aligned}$$

12

تحقیق در عملیات

در این حالت، متغیرهای دوگان متناظر محدودیت های تساوی مسئله اولیه، نامقید (آزاد در علامت) هستند.

اگر تابع هدف مسئله اولیه استاندارد، از نوع ماکزیمم سازی باشد، آنگاه تابع هدف مسئله دوگان به فرم مینیمم سازی بوده و محدودیت های آن، به صورت بزرگتری خواهند بود.

13

تحقیق در عملیات

مثال ۳-۲. مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 3x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ & 4x_1 - x_2 - x_4 = 2, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0. \end{aligned}$$

دوگان این مسئله به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \max \quad & Y = 2y_1 + 3y_2 \\ \text{s.t.} \quad & y_1 + 4y_2 \leq 3, \\ & 2y_1 - y_2 \leq 1, \\ & y_1 \leq 0, \\ & -y_2 \leq 0, \end{aligned}$$

نامقید y_1, y_2 .

14

تحقیق در عملیات

در این مسئله، متناظر دو محدودیت مسئله اولیه، دو متغیر y_1 و y_2 برای دوگان تعریف می شود و با توجه به تساوی بودن محدودیت ها، این دو متغیر، نامقید هستند.

مقادیر بردار سمت راست محدودیت های مسئله اولیه، ضرایب متغیرهای دوگان در تابع هدف هستند.

ضریب متغیر x_1 در دو محدودیت مسئله اولیه، به ترتیب برابر ۱ و ۴ بوده که ضریب متغیرهای y_1 و y_2 در محدودیت اول دوگان که متناظر x_1 است، خواهد بود. همچنین، مقدار سمت راست این محدودیت نیز برابر ضریب x_1 در تابع هدف مسئله اولیه یعنی ۳ می باشد. با توجه به نامنفی بودن متغیر x_1 ، این محدودیت به صورت کوچکتری (ک) نوشته می شود. برای سه متغیر دیگر مسئله اولیه نیز می توان به همین صورت عمل نمود.

15

تحقیق در عملیات

حالت کلی دوگان

با توجه به مطالب بیان شده در فصل اول، هر مسئله برنامه ریزی خطی را می توان به فرم کانونی با تابع هدف مینیم سازی و محدودیت های بزرگتری تبدیل نمود. سپس، به کمک تعریف قسمت قبل می توان دوگان آن را نوشت.

در این قسمت، نحوه نوشتن دوگان یک مسئله برنامه ریزی خطی به فرم دلخواه، بدون نیاز به تبدیل آن به فرم کانونی بیان می شود. جدول زیر، روابط بین متغیرها و محدودیت های یک مسئله را با متغیرها و محدودیت های مسئله دیگر برای نوشتن دوگان، بیان می کند که با توجه به نوع تابع هدف، جهت محدودیت ها و علامت متغیرها در مسئله اولیه، می توان اطلاعات مربوط به دوگان را پیدا کرده و آن را نوشت.

16

تحقیق در عملیات

$$\begin{array}{ll}
 \min z = \sum_{j=1}^n c_j x_j & \max Y = \sum_{i=1}^m b_i y_i \\
 \text{s.t. } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, i = 1, 2, \dots, m, & \text{s.t. } \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \leq c_j, j = 1, 2, \dots, n, \\
 x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n. & y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m.
 \end{array}$$

جدول ۳-۱: روابط بین محدودیت ها و متغیرهای مسائل اولیه و دوگان

مسئله ماکزیمم سازی		مسئله مینیمم سازی
محدودیت $\leq$	$\leftrightarrow$	متغیر ≥ 0
محدودیت $\geq$	$\leftrightarrow$	متغیر ≤ 0
محدودیت $=$	$\leftrightarrow$	متغیر نامقید
متغیر ≥ 0	$\leftrightarrow$	محدودیت $\geq$
متغیر ≤ 0	$\leftrightarrow$	محدودیت $\leq$
متغیر نامقید	$\leftrightarrow$	محدودیت $=$

17

تحقیق در عملیات

مثال ۳-۳. مسئله برنامه ریزی خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{ll}
 \max z = 4x_1 + x_2 - 2x_3 & \\
 \text{s.t. } x_1 + 2x_2 - 6x_3 \geq 3, & \\
 x_1 - x_2 \leq 1, & \\
 -x_1 + 3x_2 - x_3 = -5, & \\
 x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ نامقید} & .
 \end{array}$$

18

تحقیق در عملیات

$$\max Z = 4x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$\text{s.t. } x_1 + 2x_2 - 6x_3 \geq 3,$$

$$x_1 - x_2 \leq 1,$$

$$-x_1 + 3x_2 - x_3 = -5,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ نامقید}.$$

اطلاعات مسئله اولیه		اطلاعات دوگان
تابع هدف: ماکزیمم سازی	←	تابع هدف: مینیمم سازی
محدودیت اول: $\geq$	←	متغیر اول: $y_1 \leq 0$
محدودیت دوم: $\leq$	←	متغیر دوم: $y_2 \geq 0$
محدودیت سوم: $=$	←	متغیر سوم: y_3 نامقید
متغیر اول: $x_1 \geq 0$	←	محدودیت اول: $\geq$
متغیر دوم: $x_2 \geq 0$	←	محدودیت دوم: $\leq$
متغیر سوم: x_3 نامقید	←	محدودیت سوم: $=$

$$\min Y = 3y_1 + y_2 - 5y_3$$

$$\text{s.t. } y_1 + y_2 - y_3 \geq 4,$$

$$2y_1 - y_2 + 3y_3 \leq 1,$$

$$-6y_1 - y_2 = -2,$$

$$y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_3 \text{ نامقید}.$$

دوگان

19

تحقیق در عملیات

روابط بین مسائل اولیه و دوگان

در این قسمت، روابط بین دو مسئله اولیه و دوگان بیان می شود.

دوگان یک مسئله برنامه ریزی خطی، نیز یک مسئله برنامه ریزی خطی است و در نتیجه می توان دوگان آن را نوشت. قضیه زیر بدین منظور، کمک می کند.

قضیه ۳-۱. دوگان دوگان، مسئله اولیه است.

با توجه به این قضیه می توان دریافت که نام های اولیه و دوگان، نسبی هستند و همواره می توان یکی از مسائل را مسئله اولیه و دیگری را دوگان نامید.

20

تحقیق در عملیات

قضیه ۳-۱. دوگان دوگان، مسئله اولیه است.

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 4x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 - 6x_3 \geq 3, \\ & x_1 - x_2 \leq 1, \\ & -x_1 + 3x_2 - x_3 = -5, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ نامقید}. \end{aligned}$$

دوگان

$$\begin{aligned} \min \quad & Y = 3y_1 + y_2 - 5y_3 \\ \text{s.t.} \quad & y_1 + y_2 - y_3 \geq 4, \\ & 2y_1 - y_2 + 3y_3 \leq 1, \\ & -6y_1 - y_2 = -2, \\ & y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_3 \text{ نامقید}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 4x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 - 6x_3 \geq 3, \\ & x_1 - x_2 \leq 1, \\ & -x_1 + 3x_2 - x_3 = -5, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ نامقید}. \end{aligned}$$

دوگان

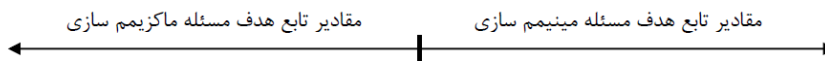
21

تحقیق در عملیات

قضیه ۳-۲. مقدار تابع هدف مسئله مینیمم سازی به ازای هر جواب شدنی دلخواه، از مقدار تابع هدف مسئله ماکزیمم سازی به ازای هر جواب شدنی دلخواه آن، بزرگتر یا مساوی است.

با توجه به مسائل اولیه و ثانویه، اگر $\bar{x}$ یک جواب شدنی مسئله مینیمم سازی و $\bar{y}$ یک جواب شدنی مسئله ماکزیمم سازی باشند، در این صورت داریم:

$$\sum_{i=1}^m b_i \bar{y}_i \leq \sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j.$$



22

تحقیق در عملیات

اولیه

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = 4x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 - 6x_3 \geq 3, \\ & x_1 - x_2 \leq 1, \\ & -x_1 + 3x_2 - x_3 = -5, \\ & x_1 \geq 0, x_2 \leq 0, x_3 \text{ نامقید.} \end{aligned}$$

دوگان

$$\begin{aligned} \min \quad & Y = 3y_1 + y_2 - 5y_3 \\ \text{s.t.} \quad & y_1 + y_2 - y_3 \geq 4, \\ & 2y_1 - y_2 + 3y_3 \leq 1, \\ & -6y_1 - y_2 = -2, \\ & y_1 \leq 0, y_2 \geq 0, y_3 \text{ نامقید.} \end{aligned}$$

$$Z = 4x_1 + x_2 - 2x_3 \leq Y = 3y_1 + y_2 - 5y_3$$

23

تحقیق در عملیات

بنابراین، اگر یکی از مسائل دارای جواب شدنی باشد، آنگاه مقدار تابع هدف به ازای آن جواب، کرانی برای تابع هدف مسئله دیگر بوده و از بینهایت شدن مقدار آن جلوگیری می کند. قضیه زیر، بیان دیگری از این مطلب است:

قضیه ۳-۳. اگر یکی از مسائل دارای جواب بهینه نامتناهی باشد، آنگاه مسئله دیگر، نشدنی است.

اما، عکس این قضیه لزوماً برقرار نیست.

24

تحقیق در عملیات

قضیه ۳-۴. اگر یک جواب شدنی از مسئله مینیم سازی و یک جواب شدنی از مسئله ماکزیم سازی دارای مقدار تابع هدف برابر باشد، آنگاه آن جواب های شدنی، جواب های بهینه مسئله نظیرشان خواهند بود.

با توجه به مسائل اولیه و ثانویه، اگر $\bar{x}$ یک جواب شدنی مسئله مینیم سازی و $\bar{y}$ یک جواب شدنی مسئله ماکزیم سازی باشند و به علاوه داشته باشیم:

$$\sum_{j=1}^n c_j \bar{x}_j = \sum_{i=1}^m b_i \bar{y}_i ,$$

در این صورت، $\bar{x}$ جواب بهینه مسئله مینیم سازی و $\bar{y}$ نیز جواب بهینه مسئله ماکزیم سازی خواهد بود. بررسی بهینگی دو جواب شدنی از دو مسئله اولیه و دوگان، به کمک قضیه فوق را اصل ناظر می نامند.

$$Z = 4x_1 + x_2 - 2x_3 \leq Y = 3y_1 + y_2 - 5y_3$$

25

تحقیق در عملیات

قضیه ۳-۵. اگر یکی از مسائل اولیه یا دوگان، جواب بهینه داشته باشد، آنگاه مسئله دیگر نیز دارای جواب بهینه بوده و مقدار بهینه تابع هدف هر دو مسئله برابر است.

با توجه به قضیه های بیان شده برای مسائل اولیه و دوگان، یکی از سه حالت زیر برای آن ها رخ می دهد:

۱. اگر یکی از مسائل دارای جواب بهینه باشد، آنگاه دیگری نیز جواب بهینه دارد و مقدار بهینه تابع هدف هر دو مسئله باهم برابر است.

۲. اگر یکی از مسائل دارای جواب بهینه نامحدود باشد، آنگاه دیگری نشدنی است.

۳. اگر یکی از مسائل نشدنی باشد، آنگاه دیگری یا نشدنی است و یا جواب بهینه نامحدود دارد.

26

تحقیق در عملیات

مثال ۳-۴. مسئله برنامه ریزی خطی زیر را به عنوان مسئله اولیه (P) در نظر بگیرید:

$$\min z = 6x_1 + 4x_2$$

$$\text{s. t. } x_1 + x_2 \geq 2,$$

$$2x_1 + x_2 \geq 3,$$

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

که دوگان (D) آن به فرم زیر است:

$$\max Y = 2y_1 + 3y_2$$

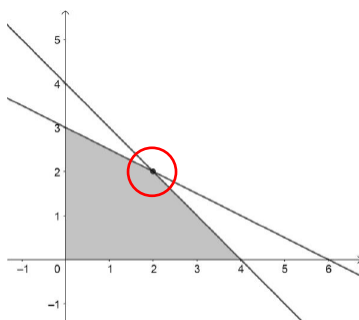
$$\text{s. t. } y_1 + 2y_2 \leq 6,$$

$$y_1 + y_2 \leq 4,$$

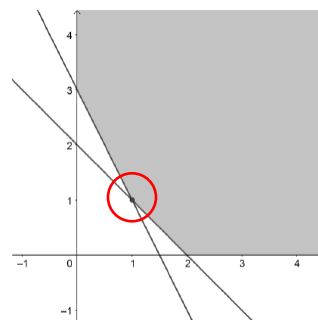
$$y_1, y_2 \geq 0.$$

27

تحقیق در عملیات



ناحیه شدنی مسئله D



ناحیه شدنی مسئله P

28

تحقیق در عملیات

در جدول زیر نیز مقدار تابع هدف هر مسئله به ازای برخی از نقاط ناحیه شدنی آن آورده شده است و می توان دید که مقادیر تابع هدف مسئله مینیم سازی (در اینجا مسئله اولیه یا P) همواره از مقادیر تابع هدف مسئله ماکزیم سازی (در اینجا مسئله دوگان یا D) بزرگتر یا مساوی است. همچنین، نقاطی از دو مسئله که مقدار تابع هدف یکسان دارند، جواب های بهینه آن مسئله هستند.

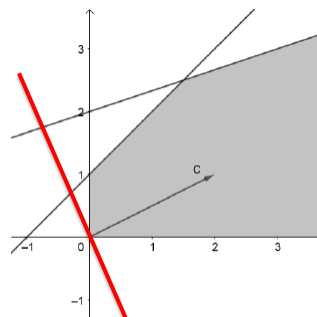
min مسئله اولیه		max مسئله دوگان	
نقاط شدنی (x_1, x_2)	مقدار تابع هدف z	نقاط شدنی (y_1, y_2)	مقدار تابع هدف Y
(1,1)	10	(2,2)	10
(2,0)	12	(4,0)	8
(0,3)	12	(0,3)	9

29

تحقیق در عملیات

مثال ۳-۵. مسئله برنامه ریزی خطی زیر را به عنوان مسئله اولیه در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 1, \\ & -x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$



ناحیه شدنی این مسئله و بردار ضرایب تابع هدف آن (C) در شکل زیر رسم شده و با توجه به روش

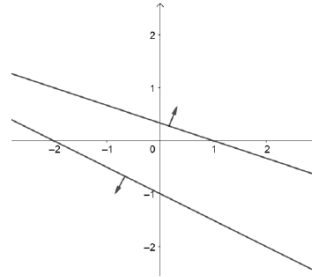
ترسیمی می توان دریافت که این مسئله دارای جواب بهینه نامتناهی است.

30

تحقیق در عملیات

دوگان این مسئله ماکزیمم سازی به فرم زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & Y = y_1 + 6y_2 \\ \text{s.t.} \quad & -y_1 - 2y_2 \geq 2, \\ & y_1 + 3y_2 \geq 1, \\ & y_1, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$



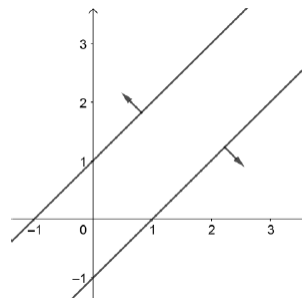
محدودیت های ناحیه شدنی مسئله دوگان در شکل زیر رسم شده و بوضوح می توان دید که فضای اشتراکی بین محدودیت ها، در ناحیه اول مختصات واقع نشده است و بنابراین، مسئله دوگان، نشدنی است.

31

تحقیق در عملیات

مثال ۳-۶. مسئله برنامه ریزی خطی زیر را به عنوان مسئله اولیه در نظر بگیرید که محدودیت های آن در فضای متغیرهای x_1 و x_2 رسم شده و بوضوح می توان دید که این مسئله نشدنی است.

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 \leq -1, \\ & -x_1 + x_2 \leq -1, \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

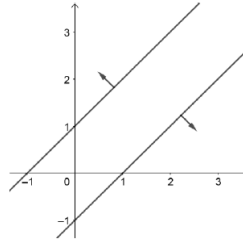


32

تحقیق در عملیات

دوگان مسئله فوق به فرم زیر است:

$$\begin{aligned} \min \quad & Y = -y_1 - y_2 \\ \text{s. t.} \quad & y_1 - y_2 \geq 1, \\ & -y_1 + y_2 \geq 1, \\ & y_1, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$



با رسم محدودیت های مسئله دوگان، در فضای متغیرهای y_1 و y_2 ، شکل زیر به دست می آید که دقیقاً مشابه ناحیه شدنی مسئله اولیه بوده و بنابراین، مسئله دوگان نیز نشدنی است.

33

تحقیق در عملیات

۱. اگر یکی از مسائل دارای جواب بهینه باشد، آنگاه دیگری نیز جواب بهینه دارد و مقدار بهینه تابع هدف هر دو مسئله باهم برابر است.
۲. اگر یکی از مسائل دارای جواب بهینه نامحدود باشد، آنگاه دیگری نشدنی است.
۳. اگر یکی از مسائل نشدنی باشد، آنگاه دیگری یا نشدنی است و یا جواب بهینه نامحدود دارد.

34

تمرینات قسمت هفتم

(۱) دوگان مسائل برنامه ریزی خطی زیر را فقط پیدا کنید.

$$\begin{array}{ll}\max & z = 3x_1 + x_2 + 3x_3 \\ \text{s. t.} & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2, \\ & 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0.\end{array}\quad (\text{مسئله ۱})$$

$$\begin{array}{ll}\min & z = 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 \\ \text{s. t.} & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 10, \\ & x_1 + 2x_3 \geq 15, \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0.\end{array}\quad (\text{مسئله ۲})$$

$$\begin{array}{ll}\max & z = 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 \\ \text{s. t.} & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ & 5x_1 - x_2 \leq 2, \\ & x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 8, \\ & x_1, x_2 \geq 0, \quad x_3 \leq 0.\end{array}\quad (\text{مسئله ۳})$$

(۲) دوگان مسئله برنامه ریزی خطی زیر را نوشته و هر دو مسئله را به روش ترسیمی حل کنید. وضعیت دو مسئله را مشخص کنید.

$$\begin{array}{ll}\max & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} & x_1 + x_2 \leq 10, \\ & x_2 \leq 7, \\ & x_1, x_2 \geq 0.\end{array}$$